第26卷 第5期
2009年10月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 26 No. 5
Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0845-10

对数正态型元件贮备系统可靠性的置信下限*

董 岩

(北京理工大学数学系，北京 100081)

摘 要: 本文研究了由 k 个相互独立的元件和一个转换开关组成的贮备系统。假设元件的寿命服从对数正态分布，转换开关为成败型，本文给出了系统可靠性的表达式、点估计以及 Fiducial 和 Bayes 置信下限。此外，还给出了系统可靠性的点估计以及置信下限的数值计算方法。在小样本情形下，通过数值比较研究了 Fiducial 置信下限和 Bayes 置信下限的覆盖率性质。

关键词: 对数正态分布；贮备系统；可靠性；Fiducial 置信下限；Bayes 置信下限

分类号: AMS(2000) 60G17　　**中图分类号:** O213.2　　**文献标识码:** A

1 引言

在可靠性评估中，贮备系统作为一个基本系统而广受关注，针对组成系统的元件的不同的试验数据，建立系统可靠性的置信限具有重要的应用价值。对于由指数型元件组成的贮备系统，吴和成[1-3]讨论了系统可靠性的精确置信下限和近似置信下限，范大茵等[4-5]还针对正态型和泊松型元件组成的贮备系统 (转换开关为成败型) 给出了可靠性的近似置信下限。若元件的寿命服从另外一种重要的寿命分布－对数正态分布时，由于无法给出此贮备系统可靠性的显式表达式，问题变得非常复杂，因此很少有工作涉及到此系统可靠性的评估问题。

设系统由 k 个独立的元件 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 和一个转换开关组成。设第 i 个元件的寿命 Y_i 服从参数为 μ, σ^2 的对数正态分布，即 $Y_i \sim LN(\mu,\sigma^2)$，$\mu, \sigma^2$ 均未知。设转换开关寿命为0-1型，可靠性为 p。

设开始时，第一个元件工作，其他的元件作冷贮备，当工作元件失效时立即由转换开关切换上第二个贮备元件，再失效再切换，在以下两种情形之一，系统就失效：

1) 当正在工作的元件失效，使用转换开关时开关失效；

2) 所有 $k-1$ 次使用开关时，开关都正常，k 个元件都失效。

设对该元件的寿命有 n 个观测样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，在 p 未知时，对转换开关还有成败型试验数据：实验 N 次，成功 M 次。本文基于 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 或 $(X_1, X_2, \cdots, X_n, M)$，求贮备系统在时刻 t 的可靠性 $R(t)$ 的点估计以及置信下限。

2 两个元件组成的贮备系统

2.1 可靠性及其点估计

收稿日期: 2008-01-08. **作者简介**: 董岩 (1973年7月生)，女，博士，讲师. 研究方向：质量与可靠性.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10471004; 10271013)；北京理工大学基础研究基金 (20060742018).

首先我们考虑两个对数正态型元件组成的贮备系统，开始时，第一个元件工作，第二个元件作冷贮备，当工作元件失效时立即由转换开关切换上第二个贮备元件，直到两个元件都失效或开关失效时系统停止工作。

设

$$\nu=\begin{cases}1, & \text{若使用开关时，开关失效,}\\ 2, & \text{若使用开关，开关正常.}\end{cases}$$

由 ν 的定义，易见

$$P(\nu=1)=q,\quad P(\nu=2)=p, \tag{1}$$

用 Z 来表示我们研究的系统的寿命，则有

$$Z=Y_1+Y_2+\cdots+Y_\nu, \tag{2}$$

故系统的可靠性是

$$\begin{aligned}R(t) &= P(Y_1+Y_2+\cdots+Y_\nu>t)\\ &= P(Y_1+Y_2+\cdots+Y_\nu>t\mid\nu=1)P(\nu=1)\\ &\quad +P(Y_1+Y_2+\cdots+Y_\nu>t\mid\nu=2)P(\nu=2)\\ &= qP(Y_1>t)+pP(Y_1+Y_2>t)\\ &= q\Big[1-\Phi\Big(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\Big)\Big]\\ &\quad +p\Big[1-\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x-\mu)^2\Big\}\Phi\Big(\frac{\ln(t-x)-\mu}{\sigma}\Big)\mathrm{d}x\Big].\end{aligned} \tag{3}$$

设 $X_i^*=\ln X_i$，由 $X_i\sim LN(\mu,\,\sigma^2)$，可知 $X_i^*\sim N(\mu,\,\sigma^2)$，所以 $(\mu,\,\sigma^2)$ 的极大似然估计为

$$\hat\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^*=\overline{X}^*,\qquad \hat\sigma^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i^*-\overline{X}^*)^2=S^{*2}.$$

若 p 未知，由转换开关的成败型数据 (N,M) 可得 p 的极大似然估计为

$$\hat p=\frac{M}{N}.$$

于是，由极大似然估计的不变性，可得在 p 已知时，$R(t)$ 的极大似然估计

$$\begin{aligned}\hat R(t) &= q\Big(1-\Phi\Big(\frac{\ln t-\overline{X}^*}{S^*}\Big)\Big)\\ &\quad +p\Big[1-\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\pi}S^*x}\exp\Big\{-\frac{1}{2S^{*2}}(\ln x-\overline{X}^*)^2\Big\}\Phi\Big(\frac{\ln(t-x)-\overline{X}^*}{S^*}\Big)\mathrm{d}x\Big],\end{aligned} \tag{4}$$

p 未知时，$R(t)$ 的极大似然估计

$$\begin{aligned}\hat R(t) &= \Big(1-\frac{M}{N}\Big)\Big(1-\Phi\Big(\frac{\ln t-\overline{X}^*}{S^*}\Big)\Big)\\ &\quad +\frac{M}{N}\Big[1-\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\pi}S^*x}\exp\Big\{-\frac{1}{2S^{*2}}(\ln x-\overline{X}^*)^2\Big\}\Phi\Big(\frac{\ln(t-x)-\overline{X}^*}{S^*}\Big)\mathrm{d}x\Big].\end{aligned} \tag{5}$$

2.2 可靠性的Fiducial置信下限

1) p已知时，$\mathbf{R(t)}$的Fiducial置信下限

由于$X_i^* = \ln X_i$来自正态分布总体$N(\mu, \sigma^2)$，$i = 1,2,\cdots,n$，所以我们基于充分统计量$(\overline{X}^*, S^{*2})$来考虑问题。由于

$$\overline{X}^* \sim N(\mu,\sigma^2/n), \quad (n-1)S^{*2}/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1),$$

并且$\overline{X}^*$和S^{*2}相互独立，若记$e_1 \sim N(0,1)$，$e_2 \sim \chi^2(n-1)$，且e_1, e_2相互独立，则有函数模型

$$\begin{cases} \overline{X}^* = \mu + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}e_1, \\ S^{*2} = \dfrac{\sigma^2}{n-1}e_2, \end{cases}$$

由此函数模型得

$$\begin{cases} \mu = \overline{X}^* - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}e_1, \\ \sigma^2 = \dfrac{(n-1)S^{*2}}{e_2}, \end{cases}$$

此模型中$\overline{X}^*$, S^{*2}是样本观测值，e_1, e_2是随机变量，从而有了$\overline{X}^*$, S^{*2}后，可诱导出(μ,σ^2)的Fiducial分布

$$\sigma^2 \sim \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2(n-1)}, \tag{6}$$

给定$\sigma^2 = \theta$的条件下，μ的条件Fiducial分布

$$\mu \mid \sigma^2 = \theta \sim N(\overline{X}^*, \theta/n). \tag{7}$$

基于(μ,σ^2)的Fiducial分布，利用(3)式可以得到$R(t)$的Fiducial分布，设$R(t)$的Fiducial分布函数为$F_R(x)$，那么$R(t)$的置信水平为$1-\gamma$的Fiducial置信下限$R_L(t)$需满足

$$F_R(R_L(t)) = \gamma. \tag{8}$$

由于很难求出$R(t)$的精确的Fiducial分布，$R(t)$的Fiducial置信下限可以通过模拟方法给出，其具体步骤为：

算法1 对于给定的观察数据$X_1, X_2, \cdots, X_n$，

(i) 首先计算$\overline{X}^*$, S^{*2}；

(ii) 设N^*为事先指定的一个比较大的数，$V \sim (n-1)S^{*2}/\chi^2(n-1)$，给定$V = v$的条件下，$U \mid V = v \sim N(\overline{X}^*, v/n)$，产生大小为$N^*$的与$(U,V)$独立同分布的样本

$$(U_1,V_1),(U_2,V_2),\cdots,(U_{N^*},V_{N^*});$$

(iii) 对于每个(U_i,V_i)，计算

$$\begin{aligned} R_i(t) \;=\; & q\Big[1-\Phi\Big(\frac{\ln t - U_i}{\sqrt{V_i}}\Big)\Big] \\ & +p\Big[1-\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{V_i}x}\exp\Big\{-\frac{1}{2V}(\ln x - U_i)^2\Big\}\Phi\Big(\frac{\ln(t-x)-U_i}{\sqrt{V_i}}\Big)\mathrm{d}x\Big] \end{aligned}$$

的值，$i = 1, 2, \cdots, N^*$，将 $R_i(t)$ 按从小到大的顺序排列，得到

$$R^{(1)}(t) \le R^{(2)}(t) \le \cdots \le R^{(N^*)}(t);$$

(iv) 设 $k = [N^*\gamma]$，则 $R(t)$ 的 $1-\gamma$ 的Fiducial置信下限为 $R^{(k)}(t)$。

2) p 未知时，$\mathbf{R(t)}$ 的Fiducial置信下限

当 p 未知时，对可靠性为 p 的转换开关的成败型数据：试验 N 次，成功 M 次，需给出 p 的Fiducial分布。

设 $X \sim B(N, p)$，$0 < p < 1$，其概率分布为

$$P(X = x) = C_N^x p^x (1-p)^{N-x}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots, N,$$

那么 X 的左连续和右连续函数分别为

$$F(x; p) = P(X < x) = \sum_{i=0}^{x-1} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} = \int_p^1 \beta(u; x, N-x+1)\mathrm{d}u,$$

$$F(x+0; p) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} = \int_p^1 \beta(u; x+1, N-x)\mathrm{d}u,$$

其中

$$\beta(u; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1}(1-u)^{b-1}, \quad 0 < u < 1, \quad a, b > 0.$$

对于离散分布，Fisher没有给出Fiducial密度，Wang[6] 运用Fisher的思想，从分布函数出发定义离散分布中参数的信仰分布。我们可以将 $F(x;p)$ 或 $F(x+0;p)$ 看成Fiducial分布。所以，给定观测值 $X = M$ 后，

$$-\frac{\partial F(M; p)}{\partial p} = \beta(p; M, N-M+1) \tag{9}$$

和

$$-\frac{\partial F(M+0; p)}{\partial p} = \beta(p; M+1, N-M) \tag{10}$$

都可以看成Fiducial密度。

当 p 未知时，$R(t)$ 的Fiducial置信下限仍然可以通过模拟方法求出，其具体步骤为：

算法2 对于给定的观察数据 $X_1, X_2, \cdots, X_n, M$，

(i) 首先计算 $\overline{X}^*$，S^{*2}；

(ii) 设 N^* 为事先指定的一个比较大的数，$V \sim (n-1)S^{*2}/\chi^2(n-1)$，给定 $V = v$ 的条件下，$U \mid V = v \sim N(\overline{X}^*, v/n)$，$W \sim \mathrm{Beta}(M, N-M+1)$ 或 $W \sim \mathrm{Beta}(M+1, N-M)$，且 W 与 (U, V) 相互独立，产生大小为 N^* 的与 (U, V, W) 独立同分布的样本

$$(U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2), \cdots, (U_{N^*}, V_{N^*}, W_{N^*});$$

(iii) 对于每个 (U_i, V_i)，计算

$$\begin{aligned} R_i(t) \;=\; & (1-W_i)\Big[1 - \Phi\Big(\frac{\ln t - U_i}{\sqrt{V_i}}\Big)\Big] \\ & + W_i\Big[1 - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{V_i}x} \exp\Big\{-\frac{1}{2V_i}(\ln x - U_i)^2\Big\}\Phi\Big(\frac{\ln(t-x) - U_i}{\sqrt{V_i}}\Big)\mathrm{d}x\Big] \end{aligned}$$

的值，$i=1,2,\cdots,N^*$，将 $R_i(t)$ 按从小到大的顺序排列，得到

$$R^{(1)}(t)\le R^{(2)}(t)\le\cdots\le R^{(N^*)}(t);$$

(iv) 设 $k=[N^*\gamma]$，$R(t)$ 的 $1-\gamma$ 的 Fiducial 置信下限为 $R^{(k)}(t)$。

2.3 可靠性的 Bayes 置信下限

由于 $X_i^*=\ln X_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，可知其密度函数为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid\mu,\sigma)=\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big)^n\Big(\frac{1}{\sigma}\Big)^n\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\Big\},$$

我们取 (μ,σ) 的先验分布为无信息的先验分布

$$\pi(\mu,\sigma)\propto\frac{1}{\sigma},\quad\sigma>0,$$

于是 (μ,σ) 的后验分布密度

$$\begin{aligned}h(\mu,\sigma)&\propto\pi(\mu,\sigma)p(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid\mu,\sigma)\\&\propto\sigma^{-(n+1)}\exp\Big\{-\frac{n-1}{2\sigma^2}S^{*2}\Big\}\exp\Big\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu-\overline{X}^*)^2\Big\},\end{aligned}\tag{11}$$

σ 的后验分布为

$$\begin{aligned}h(\sigma)&\propto\int_0^\infty\sigma^{-(n+1)}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(n-1)S^{*2}+n(\mu-\overline{X}^*)^2]\Big\}\mathrm{d}\mu\\&\propto\sigma^{-n}\exp\{-(n-1)S^{*2}/2\sigma^2\},\end{aligned}$$

即

$$(n-1)S^{*2}/\sigma^2\sim\chi^2(n-1),$$

给定 $\sigma^2=\theta$ 的条件下，由 (11) 式容易得到 μ 的条件后验分布为

$$\mu\mid\sigma^2=\theta\sim N(\overline{X}^*,\theta/n).$$

所以，在无信息先验下，(μ,σ^2) 的后验分布与 (μ,σ^2) 的 Fiducial 分布相同，进一步的，当 p 已知时，(μ,σ^2) 的 Fiducial 置信下限与 Bayes 置信下限相同。

当 p 未知时，取 p 的先验为广泛应用的 Jeffrey's 先验 Beta(1/2,1/2)，即

$$\pi(p)\propto p^{-1/2}(1-p)^{-1/2},$$

又

$$P(X=x)=C_N^xp^x(1-p)^{N-x},$$

由此若给定 $X=M$，得到 p 的后验分布为

$$h(p\mid X=M)\propto\pi(p)P(X=M)\propto p^{M-1/2}(1-p)^{N-M-1/2},$$

即

$$p\mid X=M\sim\mathrm{Beta}(M+1/2,N-M+1/2).\tag{12}$$

基于 (μ,σ,p) 的后验分布，由 (3) 式就可以得到 $R(t)$ 的后验分布，它的精确形式是很难得到的，但是我们仍然可以用模拟方法得到 $R(t)$ 的 Bayes 置信下限，其具体步骤完全类似于算法 2，在此不再详述。

3 一般情况

3.1 可靠性及其点估计

在这一节，我们讨论 k 个元件组成的贮备系统。设随机变量 ν 为

$$\nu=\begin{cases} j, & \text{若第}\,j\,\text{次使用开关时，开关首次失效,} \quad j=1,2,\cdots,k-1, \\ k, & \text{若}\,k-1\,\text{次使用开关，开关都正常,} \end{cases}$$

由 ν 的定义，易见

$$P(\nu=j)=p^{j-1}q, \quad j=1,2,\cdots,k-1, \qquad P(\nu=k)=p^{k-1}, \tag{13}$$

用 Z 来表示我们研究的系统寿命，则有

$$Z=Y_1+Y_2+\cdots+Y_\nu, \tag{14}$$

由于 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_\nu$ 与开关好坏相互独立，因此他们与 ν 相互独立，故系统的可靠性是

$$\begin{aligned} R(t) &= P(Y_1+Y_2+\cdots+Y_\nu>t) \\ &= \sum_{j=1}^{k} P(Y_1+Y_2+\cdots+Y_\nu>t \mid \nu=j)P(\nu=j) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} P(Y_1+Y_2+\cdots+Y_j>t)p^{j-1}q+P(Y_1+Y_2+\cdots+Y_k>t)p^{k-1}, \end{aligned}$$

由于

$$\sum_{i=1}^{j} Y_i, \quad j=1,2,\cdots,k,$$

的分布很难得到，不妨设

$$F_j(t;\mu,\sigma^2)=P(Y_1+Y_2+\cdots+Y_j>t), \quad j=1,2,\cdots,k,$$

有

$$R(t)=\sum_{j=1}^{k-1} F_j(t;\mu,\sigma^2)p^{j-1}q+F_k(t;\mu,\sigma^2)p^{k-1}. \tag{15}$$

设 (μ,σ^2) 的极大似然估计为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^*=\overline{X}^*, \quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^*-\overline{X}^*)^2=S^{*2},$$

若 p 未知，p 的极大似然估计为

$$\hat{p}=\frac{M}{N},$$

于是，由极大似然估计的不变性，可得在 p 已知时，$R(t)$ 的极大似然估计

$$\hat{R}(t)=\sum_{j=1}^{k-1} F_j(t;\overline{X}^*,S^{*2})p^{j-1}q+F_k(t;\overline{X}^*,S^{*2})p^{k-1}, \tag{16}$$

p 未知时，$R(t)$ 的极大似然估计

$$\hat{R}(t)=\sum_{j=1}^{k-1}F_j(t;\overline{X}^*,S^{*2})\Big(\frac{M}{N}\Big)^{j-1}\Big(1-\frac{M}{N}\Big)+F_k(t;\overline{X}^*,S^{*2})\Big(\frac{M}{N}\Big)^{k-1}. \tag{17}$$

(16)、(17) 式中的 $F_j(t;\overline{X}^*,S^{*2})$ 的值可由模拟方法得到，其具体步骤为：

算法3　对于给定的 $\overline{X}^*$，S^{*2}，

(i)　设 N^* 为事先指定的一个比较大的数，产生 N^* 组大小为 j 的来自对数正态分布 $LN(\overline{X}^*,S^{*2})$ 的独立同分布的样本 $(X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{ij})$，$i=1,2,\cdots,N^*$；

(ii)　对于每组样本 $(X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{ij})$，计算 $T_i=X_{i1}+X_{i2}+\cdots+X_{ij}$ 的值，$i=1,2,\cdots,N^*$，并计算 T_i 大于 t 的个数；

(iii)　设 s 为 T_i 大于 t 的个数，则

$$F_j(t;\overline{X}^*,S^{*2})=\frac{s}{N^*}.$$

3.2　可靠性的Fiducial和Bayes置信下限

类似于 $k=2$ 的情形，当 p 已知时，由 (6)-(8) 及 (15) 式就可以得到 $R(t)$ 的Fiducial置信下限，具体步骤为：

算法4　对于给定的观察数据 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，

(i)　首先计算 $\overline{X}^*$，S^{*2}；

(ii)　设 N^* 为事先指定的一个比较大的数，$V\sim(n-1)S^{*2}/\chi^2(n-1)$，给定 $V=v$ 的条件下，$U\mid V=v\sim N(\overline{X}^*,v/n)$，产生大小为 N^* 的与 (U,V) 独立同分布的样本

$$(U_1,V_1),(U_2,V_2),\cdots,(U_{N^*},V_{N^*});$$

(iii)　对于每个 (U_i,V_i)，利用算法3计算 $F_j(t;U_i,V_i)$，$j=1,2,\cdots,k$，从而得到

$$R_i(t)=\sum_{j=1}^{k-1}F_j(t;U_i,V_i)p^{j-1}q+F_k(t;U_i,V_i)p^{k-1}$$

的值，$i=1,2,\cdots,N^*$，将 $R_i(t)$ 按从小到大的顺序排列，得到

$$R^{(1)}(t)\le R^{(2)}(t)\le\cdots\le R^{(N^*)}(t);$$

(iv)　设 $k=[N^*\gamma]$，则 $R(t)$ 的 $1-\gamma$ 的Fiducial置信下限为 $R^{(k)}(t)$。

当 p 未知时，由 (6)-(10) 及 (15) 式就可以得到 $R(t)$ 的Fiducial置信下限，具体步骤为：

算法5　对于给定的观察数据 $X_1,X_2,\cdots,X_n,M$，

(i)　首先计算 $\overline{X}^*$，S^{*2}；

(ii)　设 N^* 为事先指定的一个比较大的数，$V\sim(n-1)S^{*2}/\chi^2(n-1)$，给定 $V=v$ 的条件下，$U\mid V=v\sim N(\overline{X}^*,v/n)$，$W\sim\text{Beta}(M,N-M+1)$ 或 $W\sim\text{Beta}(M+1,N-M)$，且 W 与 (U,V) 相互独立，产生大小为 N^* 的与 (U,V,W) 独立同分布的样本

$$(U_1,V_1,W_1),(U_2,V_2,W_2),\cdots,(U_{N^*},V_{N^*},W_{N^*});$$

(iii)　对于每个 (U_i,V_i)，利用算法3计算 $F_j(t;U_i,V_i)$，$j=1,2,\cdots,k$，从而得到

$$R_i(t)=\sum_{j=1}^{k-1}F_j(t;U_i,V_i)W_i^{j-1}(1-W_i)+F_k(t;U_i,V_i)W_i^{k-1}$$

的值，$i=1,2,\cdots,N^*$，将 $R_i(t)$ 按从小到大的顺序排列，得到

$$R^{(1)}(t)\le R^{(2)}(t)\le\cdots\le R^{(N^*)}(t);$$

(iv) 设 $k=[N^*\gamma]$，$R(t)$ 的 $1-\gamma$ 的 Fiducial 置信下限为 $R^{(k)}(t)$。

用类似的算法，基于参数的后验分布 (6)、(7)、(12) 式以及 (15) 式就可以得到 $R(t)$ 的 Bayes 置信下限，在此不再详述具体步骤。

4 数值分析

这里，我们对于由2个对数正态型元件组成的贮备系统，分别对 p 已知和未知两种情况，给出系统可靠性的 Fiducial 及 Bayes 置信下限的覆盖率 (越接近给定的置信水平越好) 和均值 (越大越好) 的一些数值结果，其中样本量为 $n=10$，$N=10$，参数的值取为 $\mu=1$，$\sigma=2,4$，$p=0.1,0.5,0.9$，模拟次数 $N_1=5000$，利用数值算法计算 Fiducial 或 Bayes 置信下限时，$N^*=5000$，置信水平 $1-\gamma=0.95$。

由表1，我们看到 p 已知时，Fiducial (Bayes) 置信下限的覆盖率非常接近给定的置信水平，下限的均值也较大，说明 p 已知时，Fiducial (Bayes) 置信下限的性质较好。

表1: p 已知时，Fiducial (Bayes) 置信下限的覆盖率和均值，$k=2$，$n=10$，$N=10$，$1-\gamma=0.95$

μ	σ	p	t	可靠性真值	覆盖率	下限均值
1	2	0.1	0.1	0.9555	0.9575	0.8154
			0.3	0.8773	0.9555	0.5977
			0.5	0.8188	0.9545	0.6244
		0.5	0.1	0.9748	0.9430	0.8781
			0.3	0.9273	0.9560	0.7863
			0.5	0.8887	0.9490	0.7295
		0.9	0.1	0.9941	0.9520	0.9443
			0.3	0.9774	0.9445	0.8814
			0.5	0.9585	0.9435	0.8333
	4	0.1	0.1	0.8125	0.9480	0.6208
			0.3	0.7312	0.9570	0.5285
			0.5	0.6881	0.9500	0.4891
		0.5	0.1	0.8805	0.9500	0.7304
			0.3	0.8193	0.9515	0.6548
			0.5	0.7849	0.9445	0.6185
		0.9	0.1	0.9485	0.9455	0.8430
			0.3	0.9075	0.9415	0.7809
			0.5	0.8816	0.9440	0.7441

由表2，我们看到p未知时，在某些情形下，Fiducial1的覆盖率略大于给定的置信水平，下限均值相对较小，说明估计稍偏保守，Fiducial2的覆盖率小于给定的置信水平，下限均值相对较大，说明估计偏冒进，Bayes置信下限覆盖率最接近给定的置信水平，下限均值居中。综合覆盖率和下限均值来看，三种方法的结果都是可以接受的，Bayes置信下限的覆盖率最为理想，在应用中值得推荐。

表2: p未知时，Fiducial置信下限与Bayes置信下限的比较，$k=2$, $n=10$, $N=10$, $1-\gamma=0.95$

					覆盖率			下限均值		
μ	σ	p	t	可靠性真值	[a]Fiducial1	[b]Fiducial2	Bayes	Fiducial1	Fiducial2	Bayes
1	2	0.1	0.1	0.9555	0.9450	0.9360	0.9510	0.8177	0.8251	0.8177
			0.3	0.8773	0.9485	0.9390	0.9575	0.6922	0.7122	0.7016
			0.5	0.8188	0.9555	0.9390	0.9460	0.6149	0.6400	0.6275
		0.5	0.1	0.9748	0.9490	0.9335	0.9460	0.8677	0.8835	0.8769
			0.3	0.9273	0.9550	0.9245	0.9480	0.7724	0.7946	0.7803
			0.5	0.8887	0.9645	0.9310	0.9445	0.7027	0.7319	0.7162
		0.9	0.1	0.9941	0.9680	0.9175	0.9520	0.9285	0.9435	0.9370
			0.3	0.9774	0.9815	0.9365	0.9600	0.8583	0.8771	0.8687
			0.5	0.9585	0.9715	0.9420	0.9530	0.8035	0.8318	0.8184
	4	0.1	0.1	0.8125	0.9505	0.9290	0.9425	0.6135	0.6390	0.6253
			0.3	0.7312	0.9630	0.9365	0.9405	0.5204	0.5517	0.5376
			0.5	0.6881	0.9520	0.9310	0.9435	0.4858	0.5057	0.4932
		0.5	0.1	0.8805	0.9555	0.9360	0.9430	0.7091	0.7324	0.7240
			0.3	0.8193	0.9510	0.9190	0.9390	0.6334	0.6589	0.6428
			0.5	0.7849	0.9575	0.9315	0.9510	0.5894	0.6158	0.6017
		0.9	0.1	0.9485	0.9660	0.9310	0.9505	0.8117	0.8419	0.8285
			0.3	0.9075	0.9650	0.9360	0.9560	0.7391	0.7715	0.7616
			0.5	0.8816	0.9625	0.9335	0.9520	0.7076	0.7386	0.7235

注：a为p的Fiducial分布为(9)时得到的$R(t)$的Fiducial置信下限，b为p的Fiducial分布为(10)时得到的$R(t)$的Fiducial置信下限。

5 算例

设系统是由k ($k=3,5$)个对数正态型元件组成的贮备系统，转换开关寿命为0-1型，可靠性为p。设对该元件的寿命有$n=10$个观测样本，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$，在p未知时，对转换开关还有成败型试验数据：实验$N=10$次，成功M次。为节省篇幅，本例中略去原始数据，只给出充分统计量$\hat{\mu},\hat{\sigma}$以及p未知时的$\hat{p}$。针对以上试验数据，分别对于p已知和未知两种情况，求系统可靠性的置信下限。计算的结果如表3和表4所示。

表 3: p 已知时 $R(t)$ 的置信下限, $1-\gamma=0.95$

k	n	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	p	t	Fiducial(Bayes) 下限
3	10	3.2853	4.5189	0.6	0.1	0.8497
3	10	1.6759	2.2056	0.9	0.1	0.9813
5	10	0.9413	0.8340	0.1	0.2	0.9622
5	10	1.5221	1.5835	0.7	0.3	0.9303

表 4: p 未知时 $R(t)$ 的置信下限, $1-\gamma=0.95$

k	n	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{p}$	t	Fiducial1 下限	Fiducial2 下限	Bayes 下限
3	10	1.3110	1.3147	0.5	0.1	0.9625	0.9694	0.9662
3	10	1.0979	4.0742	0.9	0.4	0.7613	0.8091	0.7876
5	10	1.2477	0.9867	0.3	0.4	0.9338	0.9419	0.9337
5	10	1.5568	1.8893	0.8	0.6	0.7652	0.8228	0.7946

参考文献:

[1] 吴和成. 贮备系统的可靠性及其经典精确置信限[J]. 数理统计与应用概率, 1997, 12(3): 287-293
[2] 吴和成. 贮备系统可靠性的 Bootstrap 置信限[J]. 浙江大学学报 (自然科学版), 1998, 32(6): 652-658
[3] 吴和成. 指数型元件贮备系统可靠性的近似置信限[J]. 工程数学学报, 2000, 17(3): 11-17
[4] 范大茵. 正态型元件贮备系统可靠性近似 Fiducial 置信限[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(7): 48-51
[5] 范大茵. 泊松型元件贮备系统可靠性 Fiducial 置信限[J]. 浙江大学学报 (自然科学版), 1999, 33(1): 15-19
[6] Wang Y H. Fiducial intervals: what are they?[J]. The American Statistician, 2000, 54(2): 105-111

Lower Confidence Limit for the Reliability of a Standby System with Lognormal Distribution Components

DONG Yan

(Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract: This article studies a standby system composed of k independent components and a switch. Suppose that the lifetimes of the components follow lognormal distributions and the switch is a pass-failure type. The expression, point estimation, Fiducial and Bayesian lower confidence limits for system reliability are obtained. Furthermore, numerical computations for the point estimation and the lower confidence limits are presented. For small sample, the coverage properties of Fiducial and Bayesian lower confidence limits through numerical comparison are also investigated.

Keywords: lognormal distribution; standby system; reliability; Fiducial lower confidence limit; Bayesian lower confidence limit